

LVIII олимпиада по точным наукам учащихся Эстонии
МАТЕМАТИКА, ШКОЛЬНЫЙ ТУР

Таллинн, 24 ноября 2010 года

XI класс

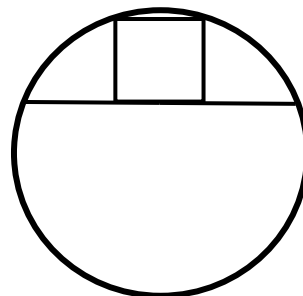
Время, отводимое для решения: 4 часа.

Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов.

Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. К окружности, заданной уравнением $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 20 = 0$, проведена восходящая касательная, которая пересекает ось Ox в точке с абсциссой $x = -3,5$. Найди координаты точки касания.
2. Найди все двузначные целые числа a , при которых значение дроби $\frac{2012+a}{a+2}$ является целым числом.
3. Докажи, что если числа x и y удовлетворяют условию $2x+4y=1$, то справедливо неравенство $x^2 + y^2 \geq \frac{1}{20}$. При каком условии выполняется равенство?

4. От круга хордой отделён сегмент, в который вписан квадрат способом, указанным на рисунке (две вершины лежат на хорде и две вершины на окружности). Длина стороны квадрата $\sqrt{19} - 2$. Найди радиус окружности при условии, что хорда стягивает дугу, на которую опирается центральный угол в 120° и квадрат вписан в меньший сегмент.



5. В танцевальном вечере принимают участие 11 юношей и 13 девушек. Могут ли они образовать круг, в котором
 - a) ни у кого из участников вечера соседями не окажутся два юноши?
 - b) ни у кого из участников вечера соседями не окажутся две девушки?